УДК 681; 510.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ЧЕБЫШЕВСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

О.В. Стукач, Е.Д. Головин

Томский политехнический университет
E-mail: tomsk@ieee.org

Сформулированы основные недостатки метода дифференциально-тейлоровских преобразований и осуществлен переход от степенного базиса к базисам ортогональных многочленов. Показано, что при осуществлении перехода к разложению по многочленам Чебышева первого рода и смещенным многочленам Чебышева существенно увеличивается скорость сходимости ряда. Сформулирован более универсальный алгоритм вычисления дискрет дифференциального спектра. Показано, что в чебышевских базисах величина дискрет спектра постоянно уменьшается с увеличением их номера. В этом случае можно остановить вычисление дискрет по достижению их величины требуемого малого значения, что нельзя сделать в степенном базисе. На численных примерах показаны преимущества перехода к разложению по многочленам Чебышева первого рода и смещенным многочленам Чебышева.

1. Дифференциально-тейлоровские преобразования функций

В тех задачах математического моделирования, в которых решение уравнений на заданном интервале изменения независимого переменного эффективно может быть представлено степенными рядами Тейлора, нашли применение дифференциально-тейлоровские преобразования [1]:

$$\Xi(\kappa) = \frac{H^{\kappa}}{\kappa!}\left[\frac{\delta^{\kappa}\xi(\tau)}{\delta\tau^{\kappa}}\right]_{\tau=t} \longleftrightarrow \xi(\tau) = \sum_{\kappa=0}^{\infty}\left(\frac{\tau - t}{H}\right)^{\kappa}\Xi(\kappa), \quad (1)$$

где слева от символа $\longleftrightarrow$ стоит прямое преобразование оригинала x(t) в изображение X(k) – дискреты дифференциального спектра, а справа – обратное преобразование X(k) в x(t), k – дискретный аргумент t – время, H, τ – постоянные.

Для восстановления x(t) по результатам измерений $x(t_1), x(t_2),\ldots,x(t_n)$ необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\xi_{\iota}(\tau) = \sum_{\kappa=0}^{\nu}\left(\frac{\tau_{\iota} - \tau}{H}\right)^{\kappa}\Xi(\kappa), \quad \iota = \overline{1,\nu}, \; t_1=\tau, \; t_n=H-\tau, \quad (2)$$

из которой определяются неизвестные дискреты *X(k)*.

Главным недостатком дифференциальных преобразований является то, что при исследовании временных характеристик реальных систем, в процессе восстановления оригинала по формуле (1) возникает необходимость возведения переменной t в большие степени. Для t порядка микросекунд или наносекунд становится проблематичным учет более десяти-пятнадцати членов ряда, так как система (2) становится плохообусловленной, и ошибка вычислений при операциях с числами большой или малой размерности становится недопустимой. Попытки определить оптимальное количество вычисленных дискрет с точки зрения получения наибольшей точности решения в степенном базисе оказались безуспешными.

Соседние дискреты, как показали многочисленные расчеты, могут отличаться на несколько порядков. Величина дискрет быстро возрастает с увеличением k, и это увеличение тем значительнее, чем больше значение k. В связи с быстрым нарастанием величины дискрет дифференциального спектра возникает проблема переполнения разрядной сетки при компьютерном расчете дискрет. С одной стороны, для более точных вычислений требуется нахождение большого количества дискрет, а с другой стороны, при реальных величинах коэффициентов в дифференциальных уравнениях при вычислении дискрет с большим номером k неизбежно появляются ошибки вычислений. В силу рекуррентного характера вычисления дискрет ошибка вычисления накапливается.

Цель работы – исследование возможности разрешения этого противоречия путем перехода к дифференциально-чебышевскому базису.

Рассмотрим переход к базису ортогональных многочленов Чебышева первого рода и смещенных многочленов Чебышева. Для этого необходимо установить связь между свободными коэффициентами степенного и анализируемого базисов. Результат может считаться положительным, если при переходе к полиномиальному базису скорость сходимости ряда увеличится.

2. Переход к дифференциально-чебышевскому базису

Среди всех полиномиальных базисов наилучшими свойствами сходимости обладают многочлены Чебышева [2] первого рода $T_i(t)$, образующие базис $\{T_k(t)\}$. Они обеспечивают наилучшую аппроксимацию в смысле минимаксной нормы [3]. Переход к чебышевскому базису можно осуществить последовательной заменой составляющих степенного базиса $t, t^2, t^3, \ldots t^n$ многочленами Чебышева.

Формула перехода в базис ортогональных полиномов Чебышева первого рода $T_i(t)$ получена в [2] и может быть записана в виде:

$$\xi(\tau) = \sum_{\iota=0}^{\infty}\sum_{\kappa=\iota}^{\left[\frac{\nu+\iota}{2}\right]}\frac{\Xi(2\kappa-\iota)\,\Gamma(\iota)(2\kappa-\iota)!\,T_{\iota}(\tau)}{2^{2\kappa-\iota-1}H^{2\kappa-\iota}\kappa!(\kappa-\iota)!} =$$

$$= \sum_{\iota=0}^{\infty} X_{\iota} T_{\iota}(\tau),$$

где

$$r(\iota) = \begin{cases} 1/2, & \iota = 0 \\ 1, & \iota \neq 0 \end{cases};$$

$$T_i(t) = \cos(i \cdot \arccos(t)), \quad (3)$$

где τ=0; n – номер старшего многочлена Чебышева, а {.} – целая часть числа.

В качестве примера рассмотрим функцию

$$\xi_0(\tau) = \ln(1+\tau) \approx \sum_{\iota=1}^{6} (-1)^{\iota+1} \tau^{\iota} / \iota = \xi_1(\tau),$$

для которой с помощью формулы (3) получаем следующее разложение:

$$\xi_2(\tau) = -0,396 T_0(\tau) + 1,375 T_1(\tau) - -0,453 T_2(\tau) + 0,146 T_3(\tau) - -0,062 T_4(\tau) + 0,013 T_5(\tau) - 0,005 T_6(\tau). \quad (4)$$

В разложении (4) отбрасывание последнего слагаемого приводит к ошибке ε=0,17, а в разложении (5) отбрасывание трех последних слагаемых приведет к ошибке ε=0,09. Построим для сравнения две зависимости, которые представляют собой полиномы третьей степени. Первый полином (6) образован из исходного (4) отбрасыванием членов выше третьего порядка, а второй (7) представляет собой полином так же третьей степени, но полученный с помощью перехода к базису разложения по первого рода. (5)

$$x_3(t) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} t^i / i,$$

$$\xi_4(\tau) = -0,396 T_0(\tau) + 1,375 T_1(\tau) - -0,453 T_2(\tau) + 0,146 T_3(\tau),$$

где $T_0(t)=1$, $T_1(t)=t$, $T_2(t)=2t^2-1$, $T_3(t)=4t^3-3t$ – многочлены Чебышева первого рода. Окончательно получаем

$$\xi_4(\tau) = 0,057 + 0,937\tau - 0,906\tau^2 + 0,584\tau^3. \quad (6)$$

Из зависимостей, построенных по формулам (6) и (7), наглядно видно, что при одинаковом порядке полиномов аппроксимация функции x(t) точнее в случае использования чебышевского базиса (см. рис. 1). В этом случае максимальное отклонение $x_4(t)$ от аппроксимируемой функции $x_2(t)$ имеет меньшее значение.

Вышеизложенную методику перехода к чебышевскому базису можно применить, в частности, в том случае, когда имеется некоторый полином, являющийся аппроксимацией неизвестной функции, и требуется понизить порядок этого полинома. Такая ситуация может возникнуть при экспериментальных исследованиях, результатом которых являются значения, являющиеся отсчетами какого-либо процесса. (7)

Если вернуться к разложению (3), можно увидеть, что последние два коэффициента чебышевского базиса зависят только от одного соответствующего коэффициента степенного базиса. Таким образом, для вычисления двух последних дискрет чебышевского базиса формулу (3) можно преобразовать к следующему виду:

$$X_{\nu} = \frac{\Xi(\nu)}{2^{\nu-1} H^{\nu}}, \quad X_{\nu-1} = \frac{\Xi(\nu-1)}{2^{\nu-2} H^{\nu-1}}.$$

То есть, чем больше количество учитываемых дискрет, тем значительнее будет уменьшение их величины в чебышевском базисе относительно степенного. Причем отношение двух последних дискрет при H=1 всегда будет равно соответствующей степени числа два. Если же H будет больше единицы, дискреты чебышевского спектра будут уменьшаться как соответствующая степень удвоенного H, то есть еще более быстро. Таким образом, показано, что в чебышевском базисе дискреты спектра убывают значительно быстрее, чем в степенном, а скорость сходимости ряда увеличивается. (8)

3. Дифференциально-чебышевские преобразования со смещенными полиномами Чебышева

Авторы [2] упустили возможность исследования точности вычисления дискрет в базисе смещенных полиномов Чебышева [3]. Проведем эти преобразования. Значение смещенных полиномов Чебышева $S_i(t)$ вычисляются по следующей формуле:

$$\Sigma_{\iota}(\tau) = \iota \cdot \sum_{\varphi=0}^{\iota} \left[\frac{(-1)^{\varphi} \cdot (2\iota - \varphi - 1)!}{\varphi! \cdot (2\iota - 2\varphi)!} \cdot (4\tau)^{\iota - \varphi} \right].$$

Первые шесть смещенных многочленов Чебышева имеют вид:

$S_0(t) = 1;$

$S_1(t) = 2t - 1;$

$S_2(t) = 8t^2 - 8t + 1;$

$S_3(t) = 32t^3 - 48t^2 + 18t - 1;$

$S_4(t) = 128t^4 - 256t^3 + 160t^2 - 32t + 1;$

$S_5(t) = 512t^5 - 1280t^4 + 1120t^3 - 400t^2 + 50t - 1;$

$S_6(t) = 2048t^6 - 6144t^5 + 6912t^4 - 3584t^3 + 840t^2 - 72t + 1.$

Отсюда последовательно находятся степени относительного аргумента Q=t/H как линейные комбинации многочленов Чебышева: (9)

$1 = S_0(\Theta)$,

$\Theta = [S_0(\Theta) + S_1(\Theta)]/2$,

$\Theta^2 = [3S_0(\Theta) + 4S_1(\Theta) + S_2(\Theta)]/8$,

$\Theta^3 = [10S_0(\Theta) + 15S_1(\Theta) + 6S_2(\Theta) + S_3(\Theta)]/32$,

$\Theta^4 = [35S_0(\Theta) + 56S_1(\Theta) + 28S_2(\Theta) + 8S_3(\Theta) + S_4(\Theta)]/128$,

и т.д.

Обозначая коэффициенты данных зависимостей через C_i, можно записать:

$$\Theta^{\kappa} = \sum_{\iota=0}^{\kappa} X_{\iota} \Sigma_{\iota}(\Theta),$$

где

$$X_{\iota} = \sum_{\kappa=\iota}^{\nu} \left(\frac{\Xi(\kappa)\rho(\iota)}{2^{2\kappa-1}} \cdot \frac{(2\kappa)}{(\kappa+\iota)\cdot(\kappa-\iota)} \right).$$

Отсюда оригинал x(t), имеющий дифференциальный спектр X(k), теперь может быть представлен в виде ряда:

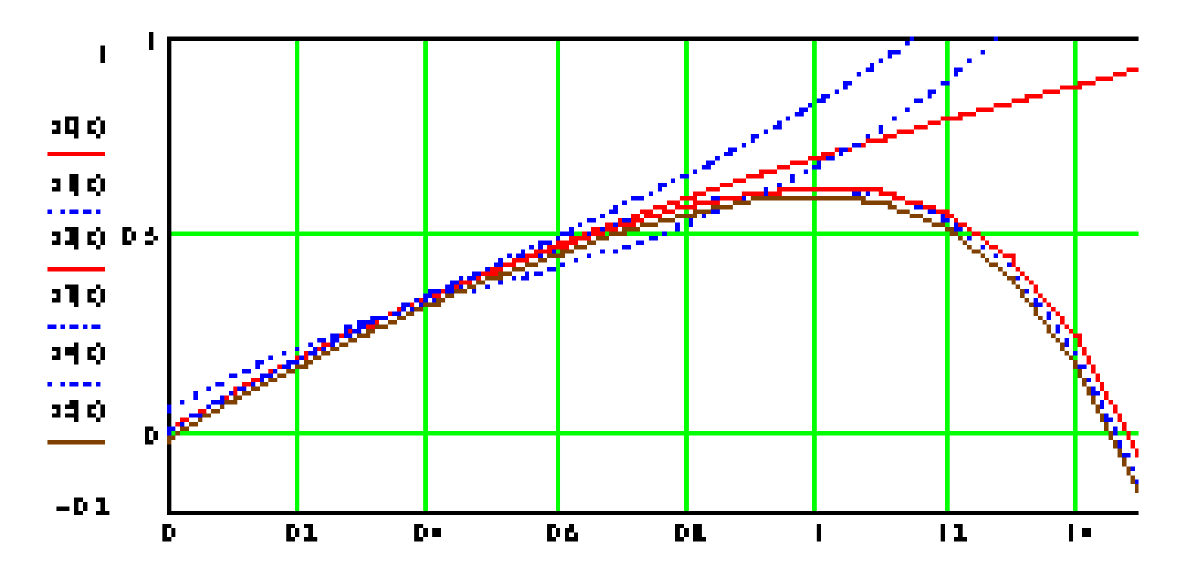


Рис. 1. Аппроксимация функции ln(1+t)

$$^{\xi}(^{\tau}) = \sum_{^{\iota}=0}^{\infty} X_{\iota}\,{}^{\Sigma}{}_{\iota}(^{\tau}) \quad .$$

Таким образом, связь коэффициентов разложения в степенном базисе и коэффициентов разложения C_i в базисе смещенных многочленов Чебышева $\{S_i(t)\}$ представляет собой формулы (9–11).

(10)

Преимущество, которое получается при использовании разложения по смещенным многочленам Чебышева в смысле скорости сходимости ряда перед разложением по многочленам Чебышева первого рода, связано с тем, что в записи смещенных многочленов присутствуют все степени t, а в записи многочленов первого рода присутствуют только либо четные, либо нечетные степени. (11) То есть в первом случае коррекции подвергаются все члены полученного степенного ряда, а во втором лишь половина. Покажем это на примере с той же функцией ln(1+t) при n=6. Произведя разложение по смещенным полиномам Чебышева, получим

$$^{\xi}{}_{5}(^{\tau}) = 0{,}34^{\Sigma}{}_{0}(^{\tau}) + 0{,}314^{\Sigma}{}_{1}(^{\tau}) -$$
$$-0{,}048^{\Sigma}{}_{2}(^{\tau}) - 5{,}53\cdot 10^{-3\,\Sigma}{}_{3}(^{\tau}) -$$
$$-3{,}42\cdot 10^{-3\,\Sigma}{}_{4}(^{\tau}) - 5{,}86\cdot 10^{-4\,\Sigma}{}_{5}(^{\tau}) -$$
$$-8{,}14\cdot 10^{-5\,\Sigma}{}_{6}(^{\tau}).$$

При сравнении полученной зависимости с выражением (7) видно, что величина коэффициентов разложения по смещенным многочленам Чебышева убывает значительно быстрее, что говорит о более высокой скорости сходимости ряда.

В формуле перехода к коэффициентам разложения в чебышевском базисе (3) значение H присутствует, в то время как в формуле (10) значение масштабной постоянной не учитывается. Получается, что коэффициенты разложения по многочленам Чебышева первого рода зависят от H, а коэффициенты разложения по смещенным многочленам Чебышева при изменении H постоянны. Значение H учитывается при подстановке выражений многочленов для получения решения в виде степенного ряда, то есть на самом последнем этапе.

Если вычислить по формуле (10) последний коэффициент разложения в чебышевском базисе, то он будет зависеть только от одного коэффициента разложения в степенном базисе. Тогда для вычисления последнего коэффициента разложения по смещенным многочленам Чебышева формула (10) преобразуется к виду

$$C_n = \frac{X(n)}{2^{2n-1}}.$$

При сравнении формулы (2) с формулой (8) для последнего коэффициента разложения по многочленам Чебышева первого рода видно, что величина последней дискреты в базисе многочленов Чебышева первого рода будет всегда в 2^n раз больше, чем величина последней дискреты в базисе смещенных многочленов Чебышева, так как

$$\frac{X(n)}{2^{n-1}} \cdot \frac{2^{2n-1}}{X(n)} = 2^n.$$

Суть того, что лучшая аппроксимация функции получается при отбрасывании членов ряда не в степенном базисе, а в базисах ортогональных многочленов, (2) заключается в следующем. При отбрасывании члена ряда максимального порядка в степенном базисе остальное выражение остается без изменения, в то время как при отбрасывании члена ряда максимального порядка в базисах ортогональных многочленов за счет их вида происходит коррекция коэффициентов степенного ряда, образующегося при подстановке соответствующих базисных многочленов. То есть при понижении степени функции автоматически корректируются коэффициенты при меньших степенях.

4. Решение плохообусловленных систем уравнений с помощью перехода к чебышевским базисам

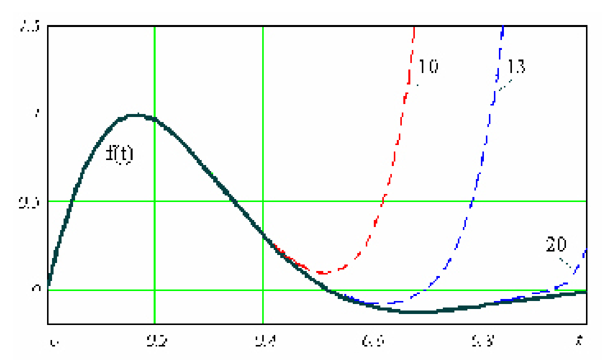


Рис. 2. Аппроксимация функции $f(t) = 2,3\exp(4t)\sin(6t)$ с ростом числа отсчетов

В радиофизике приходится часто сталкиваться с решением плохообусловленных систем уравнений. Например, при исследовании временных процессов часто требуется найти достаточно точное аппроксимирующее выражение, что связано с решением как раз плохообусловленных систем уравнений, так как это довольно кратковременные процессы. Поэтому для решения плохообусловленной системы уравнений, не разрешимой в степенном базисе, необходим предложенный переход к чебышевскому базису:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i T_i(t_j) = f(t_j), \quad i = \overline{1,n}; \quad j = \overline{1,n},$$

где $T_n(t_n)$ – численное значение многочлена Чебышева при соответствующем значении t; $f(t_n)$ – значение функции при соответствующем значении t; a_n – искомые коэффициенты. Записанная таким образом система лишена недостатков, характерных для плохо обусловленных систем.

В качестве примера возьмем функцию $f(t) = 2,3\exp(4t)\sin(6t)$. Установлено, что в степенном базисе максимальное количество отсчетов, по которому можно восстановить функцию по ур. (2), равно десяти для таких вычислительных пакетов, как MathCAD и Mathlab. Для большего количества значений ошибка восстановления слишком велика, или итерационный процесс вообще расходится. С помощью перехода к разложению по многочленам Чебышева первого рода можно найти решение при гораздо большем числе отсчетов. На рис. 2 изображена исходная функция и результат восстановления при 10, 13 и 20 значениях функции, выбранных с равномерным шагом. Видно, что при увеличении числа отсчетов аппроксимирующая функция приближается к истинной.

Переход к разложению по многочленам Чебышева можно использовать не только при работе с дифференциальным преобразованием, но и при решении плохообусловленных систем больших порядков. Для этого необходимо решить систему уравнений в чебышевском базисе, а затем подставить соответствующие многочлены Чебышева в полученное выражение.

5. Заключение

Таким образом, в работе показано, что с помощью перехода к чебышевским полиномиальным базисам увеличивается скорость сходимости ряда, в виде которого получается решение уравнения. Разложение по смещенным многочленам Чебышева наиболее предпочтительно. В чебышевских базисах можно оценивать точность полученного решения, последовательно вычисляя дискреты, так как величина чебышевских дискрет постоянно уменьшается с увеличением их номера. Так же показано, что с помощью перехода к чебышевским полиномиальным базисам появляется возможность решения систем больших порядков, решение которых обычным способом затруднительно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов / Г.Е. Пухов. – Киев: Наукова думка, 1986. –160 с.
2. Пухов Г.Е., Королев Ю.В. Формализация перехода к чебышевскому базису в дифференциально-тейлоровских преобразованиях // Электронное моделирование. – 1998. – Т. 10. – № 3. – С. 89–91.
3. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. – М.: Мир, 1976. – 568 с.